$\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$; ……. Rychlost pro stanovení zrychlení a transformací zrychlení

$a_x = \frac{du_x}{dt}$; $a_y = \frac{du_y}{dt}$; $a_z = \frac{du_z}{dt}$ Derivace rychlosti podle „univerzálního“ tempa „t“ , které se nachází ve všech třech dimenzích času jako jednotné tempo odvíjení času do tří složek prostoru x,y,z.

Ovšem derivace rychlosti podle „složek veličiny čas“ ($t_1=t_x$; $t_2=t_y$; $t_3=t_z$) s různými tempy odvíjení času „t“ v jeho časových složkách (t_x ; t_y ; t_z)

pro $a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ bude řešení podle složek času :

$$a_x = \frac{du_x}{dt_x} = \frac{d^2x}{dt_x.dt_x}; \quad a_x = \frac{du_x}{dt_y} = \frac{d^2x}{dt_y.dt_x}; \quad a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt_z.dt_x}$$

$$a_x = \frac{du_x}{dt_x} = \frac{d^2x}{dt_x.dt_y}; \quad a_x = \frac{du_x}{dt_y} = \frac{d^2x}{dt_y.dt_y}; \quad a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt_z.dt_y}$$

$$a_x = \frac{du_x}{dt_x} = \frac{d^2x}{dt_x.dt_z}; \quad a_x = \frac{du_x}{dt_y} = \frac{d^2x}{dt_y.dt_z}; \quad a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt_z.dt_z}$$

V matici vypadnou 3 shodné případy … a možná vypadnou další, když …. (?)

pro $a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$ bude : …..obdobně

a pro $a_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$ bude : …..také obdobně

………

Matematický popis

Definice **Laplaceova operátoru** zapsaná pomocí operátoru nabla, resp. pomocí operátorů divergence a gradientu, má tvar

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \operatorname{div}\operatorname{grad}.$$

Ačkoliv je tato definice nezávislá na soustavě souřadnic, zpravidla se zapisuje speciálně v kartézských souřadnicích jako

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

v *n*-rozměrném prostoru, nebo speciálně

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

v prostoru trojrozměrném.

Důležitým speciálním případem **Laplaceova operátoru** je jeho vyjádření v Minkowského čtyřrozměrném prostoru, které se často používá v teorii relativity při popisu dějů v časoprostoru. Toto vyjádření se nazývá **d'Alembertův operátor**, značí se symbolem $\Box$ a má hodnotu

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Vyjádření v různých soustavách souřadnic

Následující vztahu udávají hodnotu **Laplaceova operátoru** v nejrůznějších souřadných soutavách v trojrozměrném prostoru. Je-li funkce f skalární pole v daných souřadnicích, pak platí

Ve válcových souřadnicích:

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Ve sférických souřadnicích:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2},$$

nebo ekvivalentní tvar ve *sférických souřadnicích*

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Používáme-li obecně ortogonální souřadnice x_1,x_2,x_3, jejíž Laméovy koeficienty jsou po řadě h_1,h_2,h_3, je vyjádření *Laplaceova operátoru*

$$\Delta f = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\right)$$

Ve zcela obecných souřadnicích (viz také Souřadnicový zápis vektorů) se pak **Laplaceův operátor** zapíše jako divergence gradientu, tedy

$$\Delta f = \left(f_{;i}g^{ik}\right)_{;k} = f^{;k}{}_{;k}$$

....

Definice

O funkci $f(x_1,x_2,...,x_n)$ říkáme, že má v bodě $A = [a_1,a_2,...,a_n]$ parciální derivaci podle x_1, pokud existuje vlastní limita

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{h}$$

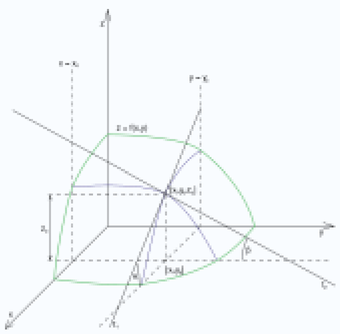
Podobně lze v daném bodě určit parciální derivaci pro libovolné x_i, tzn.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_i + h, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)}{h}$$

Parciální derivaci funkce f podle x_i v bodě A zapisujeme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A), \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, ..., a_n), f_{x_i}(A), f_{x1}(a_1, a_2, ..., a_n)$ nebo také $f'_{x1}(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Při určování parciálních derivací platí všechna pravidla jako při určování obyčejných derivací.

Geometrická interpretace



Grafická interpratace parciální derivace.

Geometrický význam parciálních derivací lze demonstrovat na funkci dvou proměnných $z = f(x,y)$. Tuto funkci lze chápat jako plochu ve třírozměrném prostoru. Parciální derivace v daném bodě $[x_0,y_0]$, v němž má funkce hodnotu $z_0 = f(x_0,y_0)$, odpovídají směrnicím tečen ve směru jednotlivých souřadnicových os. Směrnici tečny t_1 tedy získáme jako parciální derivaci podle x, tzn. $\mathrm{tg}\alpha = f_x(x_0, y_0)$, a podobně pro směrnici tečny t_2 dostaneme $\mathrm{tg}\beta = f_y(x_0, y_0)$.

Derivace vyšších řádů

Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ podle proměnné x_i představuje opět funkci, kterou lze znovu derivovat (podle libovolné proměnné), tzn. $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Obdobným způsobem lze získat také parciální derivace vyšších řádů. Např. derivací smíšené derivace druhého řádu $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ podle x dostaneme $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$.

V obecném případě je hodnota vyšší parciální derivace závislá na pořadí, v jakém jsou jednotlivé derivace prováděny, např. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ bude v obecném případě různé od $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$.

[editovat] Smíšené derivace

Pokud derivujeme podle stejných souřadnic, dostaneme (podobně jako v případě funkce jedné proměnné) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. Pokud jsou však souřadnice x_i, x_j různé, dostaneme tzv. **smíšené derivace**, tedy $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Záměnnost smíšených derivací

Pokud jsou smíšené derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ v bodě $[x_1, x_2, ..., x_n]$ spojité, pak jsou si v tomto bodě rovny, tzn.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i}\partial x_j$$

V takovém případě hovoříme o záměnnosti smíšených derivací. Podmínka spojitosti funkce a jejích derivací je ve fyzice obvykle splněna, takže záměna pořadí parciálních derivací je často používána.

Větu o záměnnosti smíšených derivací lze za obdobných předpokladů aplikovat také na derivace vyšších řádů. Jsou-li totiž všechny parciální derivace r-tého řádu v bodě A spojité, potom jsou si rovny všechny parciální derivace r-tého řádu, které se liší pouze v pořadí derivování. Tedy např. pro funkci dvou proměnných x a y platí

$$\frac{\partial^r f(x,y)}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial^r f(x,y)}{\partial y^n \partial x^m} = \frac{\partial^r f(x,y)}{\partial x \partial y^n \partial x^{m-1}} = \frac{\partial^r f(x,y)}{\partial x \partial y^{n-2} \partial x^{m-1} \partial y^2} = \ldots$$

kde $r = m + n$.

Derivace složených funkcí

Mějme funkci $z = h(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, kde $u_i = f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ pro $i = 1,2,\ldots,n$. Nechť funkce f_i jsou v bodě $A = [a_0,a_1,\ldots,a_n]$ diferencovatelné a funkce h je diferencovatelná v odpovídajícím bodě $V = [v_1,v_1,\ldots,v_n] = [f_1(a_1,a_2,\ldots,a_n),f_2(a_1,a_2,\ldots,a_n),\ldots,f_n(a_1,a_2,\ldots,a_n)]$. Za těchto podmínek je také složená funkce $h(f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n))$ diferencovatelná v bodě $[a_1,a_2,\ldots,a_n]$, přičemž

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$$

pro $i = 1,2,\ldots,n$.

Při výpočtu derivací vyšších řádů je nutné zohlednit závislost derivací $\frac{\partial z}{\partial u_i}$ na x_k.

Speciálním případem složené funkce je $z = h(x,y,u)$, kde $u = g(x,y)$. Pro parciální derivace pak dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}$$

Vlastnosti

- Zvláštním případem funkce více proměnných je funkce jedné proměnné, tzn. $f(x)$. Parciální derivace je v takovém případě rovna obyčejné derivaci, tzn.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x}$$

- Je-li funkce $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ v bodě $[a_1,a_2,\ldots,a_n]$ diferencovatelná, je v tomto bodě také spojitá.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}.$$

Vojta Hála Založen: 06. 06. 2004 Příspěvky: 580 Bydliště: Žižkov	Zaslal: čt, 14. prosinec 2006, 11:38 Předmět: citovat **Vojta Hála napsal:** Takže "1+1=2" se nedá dokázat. Dá se dokázat, že "jedna hruška a jedna hruška jsou dvě hrušky", to jistě. Jak jsem si to s odstupem po sobě přečetl, nápadně mi to připomnělo rovnici s operátory jako je třeba Schrödingerova rovnice. Obě strany jsou tam zprava násobené ψ a tady jsou jakoby obě strany násobené hruškou. :-) Takže číslo, to je vlastně takový abstraktní operátor, který v podstatě nemá smysl sám o sobě, ale teprve když řekneme, *čeho* je tolik. Stejně jako operátor nabla například: $\nabla=\partial/\partial x+\partial/\partial y+\partial/\partial z$. Samo o sobě je to jen symbol, operátor. Teprve když ho zprava vynásobíme nějakou funkcí (necháme ho působit), dostaneme něco smysluplného. $\nabla\psi=\partial\psi/\partial x+\partial\psi/\partial y+\partial\psi/\partial z$ Což samozřejmě nic nemění na tom, že můžeme dělat matematické prostocviky i se samotnými operátory (počítáme spektrum, komutátory apod.) stejně jako můžeme počítat se samotnými čísly a zjistit tak něco zajímavého o skutečné situaci, kterou ty operátory/čísla popisují.

Z tohoto dokumentu-listu , který jsem si odněkud opsal ….

Similar to last time, but now take $u \in C^2[(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n \times \mathbb{R}]$ and we have:

$$\triangle u - \partial_t^2 u = 0, \quad E(0) = \delta \ll 1 \tag{1}$$

where, as before we have:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{(0,1)^n} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \right\} dx$$

where $(0,1)^n = (0,1) \times \ldots \times (0,1)$ denotes the n-cube and dx is the surface measure on $(0,1)^n$. We are required to disprove that (1) $\Rightarrow$ the energy evolves into $E = 1$ (where again we have chosen convenient units). It follows that:

$$\frac{dE}{dt} = \int_{(0,1)^n} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} dx = \int_{(0,1)^n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx$$

where we have used (1). A quick application of the divergence theorem and noting $u \in C^2[(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n \times \mathbb{R}]$ it follows that:

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Given $E(0) = \delta \ll 1$, we have disproved the proposition stated earlier. ☐

As a corollary, we conclude that AWT stands for Arm Waving Twaddle.

… jsem si tu připravil parciální derivace a …a poprosil bych dobré lidi, dobré matematiky k ověření a o dopsání otazníků podle pravidel matematiky (ale i podle mého přání a to do prosté symboliky
„x“ se má k „t“ >tak a tak<)

… pomůže mi s tím někdo ?

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{t}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{t} \quad ; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=\frac{x^2}{t^2}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{t^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}=\frac{x}{t}\cdot\frac{1}{t}=\frac{x}{t^2} \quad ; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2=\frac{x^2}{t^2} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{x}{t}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 . dx=? \quad ; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 . dx=? \quad ; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right). dx=? \quad ; \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t.\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right). dx=? \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right). dx=?$$

JN, 03.01.2007

$$m\frac{d^2x_1}{d\,t_1^{\,2}} \quad ; \quad m\frac{d^2x_1}{d\,t_2^{\,2}} \quad ; \quad m\frac{d^2x_1}{d\,t_3^{\,2}}$$

$$m\frac{d^2x_2}{d\,t_3^{\,2}} \quad ; \quad m\frac{d^2x_2}{d\,t_1^{\,2}} \quad ; \quad m\frac{d^2x_2}{d\,t_2^{\,2}}$$

$$m\frac{d^2x_3}{d\,t_2^{\,2}} \quad ; \quad m\frac{d^2x_3}{d\,t_3^{\,2}} \quad ; \quad m\frac{d^2x_3}{d\,t_1^{\,2}}$$

matice derivací vektorů síly v časoru a prostoru